T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
LISTA 2

Wrocław, 7 marca 2010

ZADANIE 1. Sprawdź, że płaszczyzna ma tą same topologię z metrykami euklidesową, taksówkową i maksimum. Sprawdź, że półpłaszczyzna

$$\Pi^+ = \{\langle x, y\rangle : x > 0\}$$

jest zbiorem otwartym.

ZADANIE 2. Udowodnij, że każdy podciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu (x_n) zbieżnego (w przestrzeni metrycznej) do x jest zbieżny do tej samej granicy x. Udowodnij, że $\lim_n x_n = x$ wtedy i tylko wtedy gdy każdy podciag $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ma podciąg $(x_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ zbieżny do x.

ZADANIE 3. Podaj przykład rodziny (nieskończonej) zbiorów otwartych, których przekrój nie jest otwarty i analogicznie, przykład rodziny (nieskończonej) zbiorów domkniętych, których suma nie jest domknięta.

ZADANIE 4. Otoczeniem zbioru A o promieniu ϵ nazywamy zbiór

$$K(A, \epsilon) = \{x : \exists_{y\in A} : d(x, y) < \epsilon\}.$$

sprawdź, że $K(A, \epsilon) = \bigcup_{y\in A} K(y, \epsilon)$ (i wywnioskuj z tego, że $K(A, \epsilon)$ jest zbiorem otwartym). Następnie udowodnij, że F jest zbiorem domkniętym wtedy i tylko wtedy gdy

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} K(F, \tfrac{1}{n}).$$

Tomasz Downarowicz